

برهم کنش هیدرودینامیکی دو شناگر ریزمقیاس

مجید فرزین* و علی نجفی

دانشکده فیزیک، دانشگاه زنجان

چکیده در این مقاله ابتدا نوعی شناگر ریزمقیاس دوبعدی را پیشنهاد می‌کنیم که از تعدادی کره صلب تشکیل شده است و این کره‌ها به وسیله فنرهایی که قابلیت کشش و خمش دارند، به هم متصلند. سرعت متوسط این شناگر را بدست می‌آوریم و اثر تغییر ثابت کششی فنرها بر سرعت را محاسبه می‌کنیم. سپس دو شناگر یکسان را در سیالی با ویسکوزیته مشخص قرار می‌دهیم و اثر برهمکنش‌های هیدرودینامیکی را بر سرعت شناگرها بدست می‌آوریم. ارائه چنین مدلی می‌تواند در ساخت ماشین‌هایی شبیه به موجودات ریزمقیاس مفید باشد.

کلمات کلیدی برهمکنش هیدرودینامیکی، موجودات زیست شناختی ریزمقیاس، اعداد رینولدز کوچک، تانسور اوسین.

Hydrodynamic Interactions between Two Micro-Swimmers

M. Farzin* and A. Najafi

Physics Department, Zanjan University, Zanjan, Iran

Abstract We propose a two dimensional model swimmer consists of spheres linked by elastic springs which can be stretched and bent. This swimmer performs nonreciprocal periodic motions that breaks time reversality and it can swim in low Reynold's number. We show that the velocity increases as the stretch constant increases. In the second part we place two of these swimmers in a viscous fluid and calculate the effect of hydrodynamic interactions on the average velocity.

Keywords Micro-Swimmer, Hydrodynamic Interactions, Biological Micro-Organism, Reynold's Number, Oseen's Tensor.

*عهده‌دار مکاتبات

نشانی: استان زنجان، دانشگاه زنجان، دانشکده فیزیک.

تلفن: - دورنگار: - پیام‌نگار: farzin@znu.ac.ir

۱- مقدمه

$$H = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^N (l_i - l_0)^2 + \frac{1}{2} A \int_0^L \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 ds \quad \text{رابطه (۱)}$$

که N تعداد کل کره‌ها، k ثابت فنرها، l_0 فاصله تعادلی، A سختی خمشی و S طول قوس است [۳]. این انرژی آزاد برای توصیف یک پلیمر بلند به کار می‌رود، مانند دم برخی از باکتری‌ها.

اما موتور محرک این سیستم، شناگری است که در منبع [۴] معرفی شده است. این موتور شامل سه کره است که به وسیله دو میله نازک به هم متصل هستند. طول این میله‌ها می‌تواند به صورت متناوب تغییر می‌کند و این نوسان‌ها اختلاف فازی برابر $\frac{\pi}{2}$ با یکدیگر دارند و همین اختلاف فاز باعث شکسته شدن تقارن زمانی می‌شود و شناگر شروع به حرکت می‌کند. طول میله‌ها به صورت زیر با زمان تغییر می‌کنند:

$$l_2 = l_0 + d \sin(\omega t), \quad \text{رابطه (۲)}$$

$$l_3 = l_0 + d \sin(\omega t + \pi/2)$$

که d دامنه نوسان میله و l_0 طول تعادلی میله و ω فرکانس زاویه ای نوسان هستند. چرخه حرکت موتور محرک را در شکل ۳ می‌بینیم.

۳- معادلات حرکت

شناگر در یک سیال با ویسکوزیته بالا $\eta = 10^{-3} \text{ (Ns/m}^2\text{)}$ قرار دارد. طول شناگر $30 \mu\text{m}$ است. برای به دست آوردن میدان شارش باید معادله استوکس را تحت شرایط مرزی موجود حل کنیم. معادله استوکس به صورت زیر است:

$$\eta \nabla^2 U(x, t) - \nabla p(x, t) = 0 \quad \text{رابطه (۳)}$$

بیشتر اجسام زیست‌شناختی در مقیاس ریز می‌توانند به خوبی با سرعت‌هایی از مرتبه $1 \mu\text{m/s}$ شنا کنند، در نتیجه عدد رینولدز برای چنین موجوداتی در آب، از مرتبه 10^{-4} است. پورسل در کار پیشگامانه خود [۲] نشان داد که موجوداتی مثل صدف‌ها که دارای یک بند هستند، نمی‌توانند با یک باز و بسته شدن ساده شنا کنند. دلیل آن واضح است؛ از آنجایی که این حرکت برگشت‌پذیر است، پس از پایان یک چرخه موجود در مکان اولیه خود خواهد بود. او پیشنهاد کرد که یک حرکت نامتقارن، که تقارن زمانی را می‌شکند، برای ایجاد جابجایی خالص ضروری است. این نوع حرکت به موجود کمک می‌کند تا خودش را در طول هر چرخه و در جهتی که به خاطر تقارن دستگاه و حرکت مرجح است، پیش برد. او ثابت کرد که اگر شناگر دارای دو درجه آزادی یا بیشتر باشد، می‌تواند شنا کند. شناگر پیشنهادی او را در شکل ۱ می‌بینیم.

ایده اصلی پورسل را به کار می‌بریم و یک مدل قابل ساخت در آزمایشگاه را که می‌تواند به وسیله حرکت‌های نوسانی سه کره اول [۱] و انتشار یک موج طولی در سایر کره‌ها شنا کند ارائه می‌دهیم و سپس برهم کنش هیدرودینامیکی دو تا از این نوع شناگرها را بررسی می‌کنیم.

۲- مدل پیشنهادی

شناگری که ما پیشنهاد می‌کنیم در شکل ۱ نشان داده شده است: در این شناگر انحراف طول از حالت تعادل $l_i = |\vec{t}_i|$ برای هر کره از قانون هوک پیروی می‌کند و انرژی آزاد کل کششی و خمشی برای شناگر به این صورت محاسبه می‌شود [۳]:



شکل ۱. شناگر دوبعدی.

۴- شبیه‌سازی

شبیه‌سازی با دقت 0.001 انجام شده است. مقادیر به کار رفته در شبیه‌سازی در جدول ۱ نشان داده شده است. فرکانس نوسان در شبیه‌سازی 2000π Hz است. نتایج شبیه‌سازی را در شکل‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ مشاهده می‌کنیم. سرعت برحسب $1.5 \times 2\pi (\mu\text{m/s})$ و زمان برحسب $\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ s بیان شده است. شکل ۲ سرعت متوسط یک شناگر را به ازای ثابت‌های کششی مختلف نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که با افزایش ثابت فنرها سرعت متوسط کمتر می‌شود.

جدول ۱. ثابت‌های به کار رفته و مقادیر عددی آنها.

| علامت اختصاری | ثابت | مقدار در شبیه‌سازی |
|-------------------------|---------------------|-------------------------------|
| N | تعداد کره‌ها | ۲۰ |
| Radius(μm) | شعاع کره‌ها | ۰/۵ |
| l(μm) | فاصله تعادلی کره‌ها | ۱/۵ |
| $\eta(\text{Ns/m}^2)$ | ویسکوزیته سیال | 10^{-3} |
| K(N/m) | ثابت کششی فنرها | $0.2\pi, 2\pi, 20\pi, 200\pi$ |
| A(Nm) | ثابت خمشی فنرها | $4/5 \times 10^{-22}$ |
| d(μm) | دامنه نوسان | ۰/۱۵ |

در اینجا p فشار سیال است. شرایط مرزی در اینجا همان شرط مرزی بدون شیب (No slip) است. در ابعاد میکرومتر و سرعت‌های چند میکرومتر بر ثانیه و همچنین برای زمانهای بزرگتر از زمان واهلش تکانه، می‌توان از اینرسی صرف نظر کرد به طوری که سرعت کره‌ها برحسب نیروهای وارد بر آنها خطی خواهد شد. بنابراین دینامیک شناگرها از معادله زیر پیروی می‌کند [۴]:

$$\vec{V}_i = \sum_{j=1}^N \vec{\mu}_{ij} \cdot \vec{F}_j \quad \text{رابطه (۴)}$$

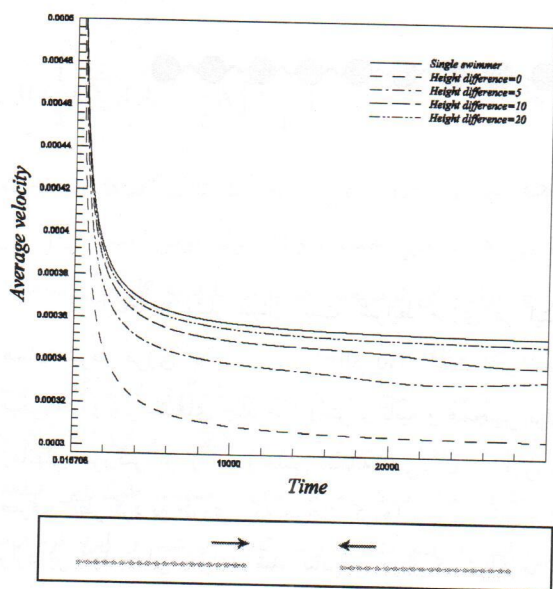
در این معادله اندیس‌ها نشاندهنده شماره ذرات اند و کمیت‌های مهم در روش ما $\vec{\mu}_{ij}$ یا Mobility ها هستند. در واقع، برهم‌کنش‌های هیدرودینامیکی یک مسئله بس ذره‌ای پیچیده است که بیشترین سهم برهم‌کنش مربوط به ذرات مجاور می‌باشد. در تقریب اوسین Oseen، Self Mobility ها به صورت:

$$\vec{\mu}_{ii} = \frac{I}{6\pi\eta a} \quad \text{رابطه (۵)}$$

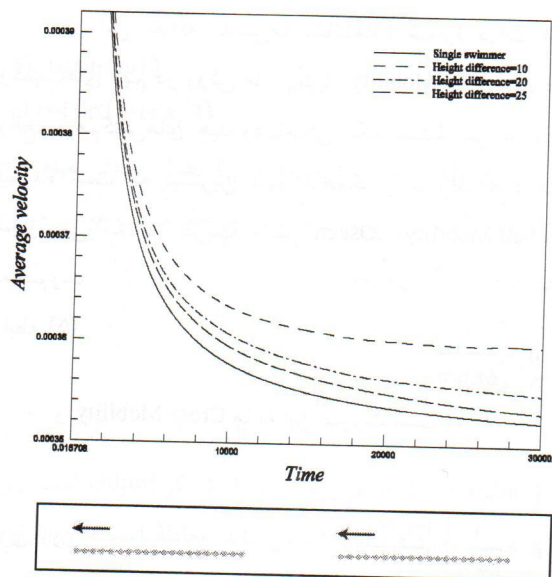
و Cross Mobility ها به این صورت است [۴]:

$$\vec{\mu}_{ij} = \frac{1}{8\pi\eta} \left[\frac{\vec{I} + \hat{r}_{ij} \otimes \hat{r}_{ij}}{r_{ij}} \right] \quad \text{رابطه (۵)}$$

که r_{ij} فاصله بین کره i و j است. برای بدست آوردن مسیر ذرات $\vec{r}_i(t)$ و دینامیک شناگرها، از معادله حرکت به صورت عددی و با روش اویلر انتگرال می‌گیریم.

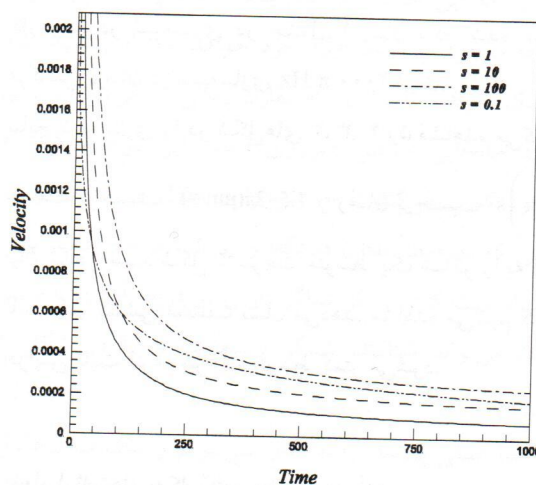


شکل ۳. شناگرهای (۱) و (۲) به طور موازی به سمت هم حرکت می کنند.



شکل ۴. شناگرهای (۱) و (۲) به طور موازی و هم جهت حرکت می کنند.

در این شکل مشاهده می کنیم که سرعت شناگر به ترتیب به مقادیر $\frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$ 1.98, 2.21, 2.59, 2.83 میل می کند. زمان شبیه سازی $\frac{7}{95}$ ثانیه است. البته هنگامی که ثابت فنرها را تغییر می دهیم، باید مراقب باشیم تا این مقدار نه خیلی زیاد و نه خیلی کم نشود، چون حرکت شناگر مختل خواهد شد. در حد خیلی زیاد شناگر مثل یک جسم صلب خواهد شد و نوسانی در دم الاستیک دیده نمی شود. در حد خیلی کوچک کره ها از هم باز شده و شناگر از هم می باشد.



شکل ۲. سرعت متوسط شناگر در ثابت های فنری مختلف.

شکل ۳ سرعت متوسط شناگر (۱) در حالتی که شناگر (۲) از روبرو به آن نزدیک می شود را نشان می دهد. همانطور که می بینیم در این حالت سرعت بیشتر از حالت شناگر منزوی است و با زیاد شدن فاصله شناگرها به سرعت شناگر منزوی نزدیک می شود.

در شکل ۴ شناگرهای (۱) و (۲) به طور موازی و هم جهت حرکت می کنند. شناگر (۲) پشت سر شناگر (۱) حرکت کرده و در این حالت شناگر (۲)، شناگر (۱) را جذب می کند، در نتیجه سرعت کمتر از سرعت شناگر منزوی است.

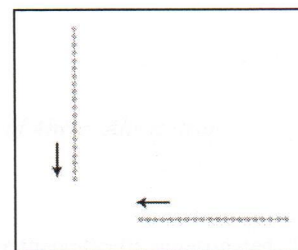
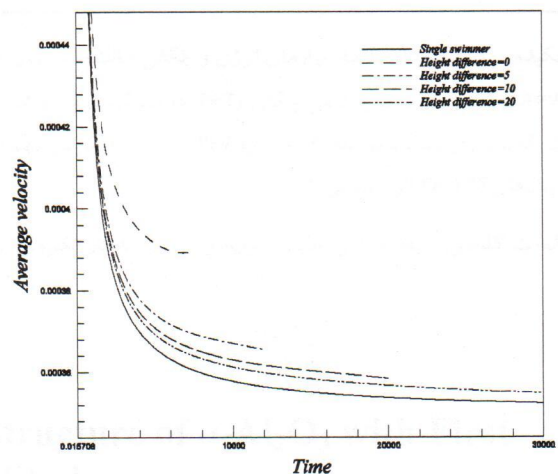
۵- نتیجه گیری

شناگر پیشنهادی بدون وجود برهم کنشهای هیدرودینامیکی قادر به شناکردن نیست. با خاموش کردن برهم کنش هیدرودینامیکی در شبیه سازی مشاهده کردیم که شناگر در جای خود نوسان کرده و پیشروی نمی کند. افزایش ثابت کششی فنرها، باعث کاهش سرعت متوسط شناگر می شود. سرعت شناگرها در حضور یکدیگر تحت تاثیر برهم کنشهای هیدرودینامیکی تغییر کرده و با افزایش فاصله شناگرها از هم سرعت آنها به سرعت شناگر منزوی میل می کند، اما به دلیل بلند برد بودن این برهمکنشها دقیقاً با سرعت شناگر منزوی برابر نخواهد بود به طوری که در حرکت رو به هم جذب، در حرکت پشت سر هم دفع و در حرکت عمود بر هم نیز جذب اتفاق می افتد.

مراجع

1. Najafi, A. & Golestanian, R. "Simple swimmer at low Reynolds number: three linked spheres", *Phys. Rev. E* 69, 062901, 2004.
2. E. M. Purcell, "Life at low Reynold's numbers" *Am. J. Phys.* 45, 3, 1977.
3. Gauger, E. & Stark, H. "Numerical study of a microscopic artificial swimmer", *Phys. Rev. E.* 74.21907, 2006.
4. Reichert, M. "Hydrodynamic interactions in colloidal and biological systems" *Konstanzer Online-Publikations-System (KOPS)*, 2006.

در شکل ۵، شناگر (۲) به طور عمود بر شناگر (۱) و به طرف آن حرکت می کند. از شکل پیداست که سرعت بیشتر از سرعت شناگر منزوی است چون دو شناگر جذب یکدیگر می شوند.



شکل ۵. شناگرهای (۱) و (۲) به طور عمود نسبت به هم حرکت می کنند.